I - INTEGRALES ELLIPTIQUES

1 - Pour $0 < k < 1$ on pose $sn_k^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2).(1-k^2.t^2)}}$.

a - Montrer que $sn_k^{-1}(x)$ existe pour $x \in]-1,1[$.

b - Etudier la parité, la dérivabilité et le sens de variation de sn_k^{-1} sur $]-1,1[$.

c - Montrer que les intégrales généralisées $sn_k^{-1}(-1)$ et $sn_k^{-1}(1)$ convergent.
On pose $K(k) = sn_k^{-1}(1)$ (ou K lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible).

d - sn_k^{-1} est-elle continue à gauche en 1 ?

2 - a - Montrer que sn_k^{-1} admet une fonction réciproque notée sn_k.

b - Quel est l'ensemble de définition de sn_k ?

c - Etudier la parité et le sens de variation de sn_k.

3 - On pose $X_k^{-1}(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-k^2.\sin^2 u}}$.

a - Déterminer l'ensemble de définition de X_k^{-1} et son sens de variation.

b - Montrer que $T_k = X_k^{-1}(x+\pi) - X_k^{-1}(x)$ est indépendant de x.

c - Montrer que X_k^{-1} admet une fonction réciproque X_k dont on précisera la parité et le sens de variation.

d - Déterminer l'ensemble de définition E_{X_k} de X_k.

e - Montrer que $\forall t \in E_{X_k}\ X_k(t+T_k) = X_k(t) + \pi$.

4 - a - Montrer que $\forall t \in [-K, K]$ $sn_k(t) = \sin(X_k(t))$.

b - Comparer $K(k)$ et $\frac{T_k}{2}$.

c - On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$ $sn_k(t) = \sin(X_k(t))$, $cn_k(t) = \cos(X_k(t))$,

$$dn_k(t) = \sqrt{1-k^2.sn_k^2(t)}.$$

Montrer que sn_k, cn_k, dn_k sont des fonctions périodiques dont on donnera les périodes en fonction de T_k.

d - Montrer que sn_k, cn_k, dn_k sont dérivables et exprimer leurs dérivées au moyen des fonctions sn_k, cn_k et dn_k.

II - INTEGRALES DE WALLIS.

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1 - Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2 - Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.

3 - Calculer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de 2^{2n}, de factorielles et de π.

4 - Montrer que pour tout entier non nul n on a : $\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \leq I_{2n} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}}$.

5 - En déduire un équivalent de I_{2n} au voisinage de $+\infty$ et la limite de (I_n).

III - PERIODE D'UN PENDULE SIMPLE.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \omega^2 . \sin(y) = 0 \quad (1),$$

ω étant un réel strictement positif donné (Equation du pendule simple).

On considère $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donné.

1 - On considère l'équation différentielle suivante (cas des petites oscillations) :

$$y'' + \omega^2 . y = 0 \quad (2).$$

a - Résoudre cette équation (2).

b - Montrer qu'il existe une et une seule solution y_0 de (2) définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $y_0(0) = \alpha$, $y_0'(0) = 0$. La déterminer. Montrer qu'elle est périodique et déterminer sa période T_0 en fonction de ω.

2 - a - Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 tel que (1) admette une et une seule solution y_1 définie sur ce voisinage et vérifiant $y_1(0) = \alpha$, $y_1'(0) = 0$.

b - Pour tout $k \in]0, 1[$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble de définition $\boxed{E}$ de la fonction f définie par : $f(t) = \text{Arcsin}\left(k.\, sn_k\left(\omega.(t - t_0)\right)\right)$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur E.

c - Montrer qu'il existe $\boxed{k}$ et $\boxed{t_0}$ à déterminer tels que :

$$\forall t \in I \quad y_1(t) = -2.\text{Arcsin}\left(k.sn_k\left(\omega.(t - t_0)\right)\right).$$

On exprimera k en fonction de α et t_0 en fonction de T_k et ω.

d - En déduire que y_1 peut être prolongée en une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$, que nous noterons encore y_1.

e - Montrer que y_1 est périodique et déterminer sa période $\boxed{T_1}$ en fonction de ω et K.

f - Montrer que T_1 est une fonction croissante de α.

3 - a - Montrer que $\dfrac{T_1}{T_0}$ ne dépend que de α (et non de ω).

b - Montrer que $\dfrac{T_1}{T_0} = A.\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2.\sin^2 u}}$, $\boxed{A}$ à déterminer.

c - Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ est développable en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n.$$

Préciser le rayon de convergence $\boxed{R}$ et $\boxed{a_n}$ (en fonction de I_{2n} de la partie II).

d - Montrer que $\dfrac{T_1}{T_0} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n.k^{2n}$, les $\boxed{b_n}$ étant à déterminer (toujours en fonction de I_{2n}).

e - On pose $R_n(k) = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{\infty} b_p.k^{2p}$. Montrer que $|R_n(k)| \leq \dfrac{4}{\pi^2}.\dfrac{k^{2(n+1)}}{1 - k^2}$.

f - On se place dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Quel $\boxed{n}$ peut-on choisir pour que $R_n(k)$ soit inférieur à 10^{-2} ? Donner une valeur approchée de $\boxed{\frac{T_1}{T_0}}$.

IV - LEMNISCATE.

On considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Tout point de ce plan est déterminé par un système de coordonnées polaires (ρ,θ). On considère un réel strictement positif c donné et le sous-ensemble (L) du plan défini par :

$$\rho^2 = c^2 . \sin 2\theta .$$

1 - Montrer que (L) est la réunion de deux arcs paramétrés définis en coordonnées polaires. Représenter (L).

2 - Montrer que la longueur d'un de ces arcs entre $\theta_0 = \frac{\pi}{12}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ est :

$$L = a. \int_b^d \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} ,$$

$\boxed{a, b, d}$ étant des constantes à déterminer.